Fibonaccin illuusio

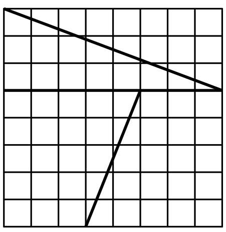
Fibonaccin lukujonolla tarkoitetaan jonoa, jonka 1. ja 2. luku ovat ykkösiä, ja muut luvut saadaan laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen. Se on saanut nimensä 1200 luvulla eläneen Fibonaccicsi kutsutun Leonardo Pisalaisen mukaan. Fibonaccin luvuista käytetään yleensä merkintää, jossa *n*:s luku on F_n. Jonoon katsotaan joskus kuuluvaksi myös luku $F_0=0$. Fibonaccin jonoon kuuluvista luvuista käytetään yhteisnimitystä Fibonaccin luvut. Lukujonoja, jotka muodostetaan samoin kuin Fibonaccin jono, paitsi että kaksi ensimmäistä jäsentä voivat olla mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja kutsutaan yleistetyiksi Fibonaccin jonoiksi.

Fibonaccin lukuihin liittyy seuraavia mielenkiintoisia ominaisuuksia

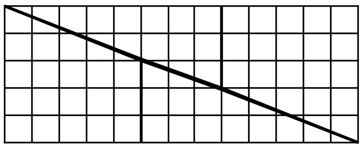
1. $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n, n \geq 1$
2. $F_{2n+1} = F_n^2 F_{n+1}^2$
3. $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$
6. Joka *n*:s Fibonaccin luku on jaollinen F_n:llä.
7. $\mathrm{syt}(F_n, F_{n+1}) = 1$
8. $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ lähenee kultaista leikkausta kun *n* lähenee ääretöntä.

Ominaisuuteen 1 liittyy seuraava kuuluisa illuusio:

Leikataan ruutupaperista shakkilaudan kokoinen, eli $8 \times 8 = 64$ ruudun neliö, ja paloitellaan se seuraavan kuvan osoittamalla tavalla:



Palaset irroittaa toisistaan voidaan järjestää uudestaan siten, että ne muodostavat seuraavan laisen kuvion:



Kuvion sivut ovat 5 ja 13 ruutua, joten sen pinta-alaksi saadaan 65 ruutua! Jomman kumman kuvion ala on siis laskettu väärin. Jälkimmäinen kuvio ei itse asiassa olekaan suorakaide. Sen keskellä on hyvin kapea suunnikkaan muotoinen aukko, jonka pinta-ala on 1. Tämän suunnikkaan kärkipisteet ovat myötäpäivään A, C, D ja B. Virheen voi havaita jo siitäkin, että kappaleiden vinojen sivuje kulmakertoimet ovat erisuuruiset ($-\frac{3}{8}$ ja $-\frac{5}{2}$).

Virheen vaikea havaittavuus perustuu siihen, että 5, 8 ja 13 ovat kolme peräkkäistä Fibonaccin lukua, joista keskimmäisen neliö poikkeaa ominaisuuden 1 mukaan yhdellä sen kummallakin puolella sijaitsevien lukujen tulosta. Poikkeaman suunta riippuu siitä, onko keskimmäisen luvun järjestysluku parillinen vai pariton, ja siksi illuusio toteutuukin parhaiten parillista astetta olevilla Fibonaccin luvuilla. Illuusio tulee sitä vakuuttavammaksi, mitä suurempia lukuja käytetään. Esimerkiksi kun valitaan luvut 13, 21 ja 34, saadaan "pinta-aloiksi" 442 ja 441. Suunnikkaan leveydeksi tulee tällöin vain 0,4.

Sampo Tiensuu

Fyllot Leh

Kultaien leikkaus ja Fibonaccin luvut esiintyvät luonnossa lähes kaikkialla. Joskus niiden merkitys on selvä, kuten esimerkiksi kuvattaessa eläinpopulaation kokoa, mutta kun ne löytyvät kasvin siementen lukumääristä tai niiden osien kokosuhteista, yhteys näyttää lähinnä sattumalta. Kasveilla on kuitenkin hyvät evolutiiviset perusteet noudattaa näitä lukuja. Erityisesti ne ilmenevät samankaltaisten kasvin osien keskinäisessä sijoittumisessa eli fyllotaksiassa. Kasvien lisäksi samaa teoriaa voidaan soveltaa esimerkiksi simpukankuorten täpliin tai muurahaiskävyn suomuihin.

Esimerkiksi auringonkukan tai päivänkakkaran mykerössä siemenet näyttävät sijoittuvan spiraaleihin, joista toinen kiertää myötäpäivään ja toinen vastapäivään. Näiden spiraalien lukumäärät ovat lähes poikkeuksetta peräkkäisiä Fibonaccin lukuja. Luvut vaihtelevat kukinnon koon mukaan: Keskikokoisissa auringonkukan mykeröissä on yleensä nähtävissä 34 toiseen suuntaan ja 55 toiseen suuntaan kaartuvaa spiraalia. Suuremmissa nämä luvut saattavat olla 55 ja 89, tai jopa 89 ja 144. Pienemmissä puolestaan 21 ja 34 tai 13 ja 21. Yleisesti, jos mykerössä näkyy *m* spiraalia myötäpäivään ja *n* vastapäivään, sillä sanotaan olevan (*m*, *n*) fyllotaksia.

Auringonkukan mykeröiden on havaittu noudattavan yksinkertaista mallia, jonka mukaan jokainen kukka sijaitsee aina samassa kulmassa (δ) edelliseen nähden. Tätä kulmaa kutsumme poikkeamakulmaksi. Tällöin *N*:nen kukan paikka voidaan ilmaista napakoordinaatistosa seuraavasti:

$$\phi = \delta \cdot N, \qquad (1)$$
$$r = c\sqrt{N},$$