Luonnon geometriaa

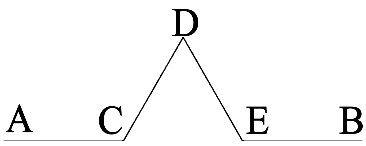
$D=1$

Geometria on hyvä tapa kuvata yksinkertaisia kappaleita, mutta kappaleiden tullessa äärettömän monimutkaisiksi, käy niiden kuvaaminen klassisen geometrian avulla mahdottomaksi. Esimerkiksi rantaviivan pituuden määrittäminen on tunnettu ongelma. Äärettömän monimutkaisia kappaleita tutkivaa geometriaa kutsutaan fraktaaligeometriaksi.

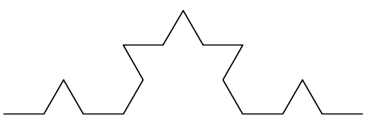
Jotta pääsemme alkuun, kutsumme aluksi fraktaaleiksi kappaleita, jotka eivät yksinkertaistu mittakaavaa suurennettaessa. Seuraavassa tarkasteltava käyrä on hyvä esimerkki fraktaalista.

Olkoon jana AB:

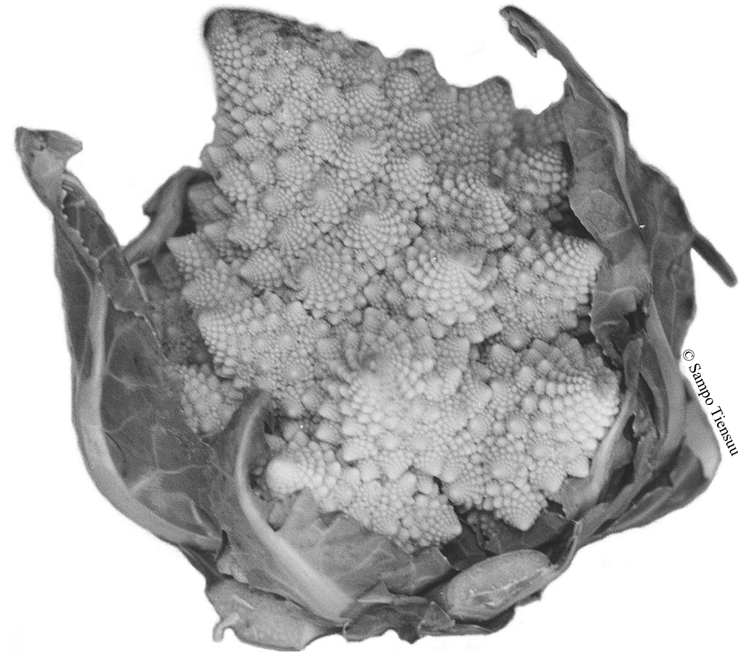
Korvataan tämä murtoviivalla:



Tämä muodostuu neljästä osajanasta AC, CD, DE jaEB, joiden pituus on $r = \frac{1}{3} \cdot |AB|$, jolloin koko murtoviivan pituudeksi saadaan $\frac{4}{3} \cdot |AB|$. Kun jokainen näin saaduista osajanoista korvataan vielä samanlaisella murtoviivalla, saadaan seuraava toisen asteen murtoviiva:

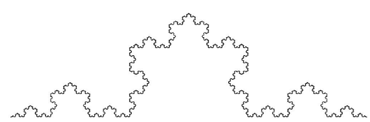


n-asteen murtoviiva koostuu 4^n janasta, joiden pituus on $\frac{1}{3^n} \cdot |AB|$.



Kuva 22: *Fraktaalinen kukkakaali*

n-asteisen murtoviivan



pituus on siis $\frac{4^n}{3^n} \cdot |AB|$. On selvää, että käyrän pituus kasvaa n:n kasvaessa, joten kun operaatio toistetaan äärettömän monta kertaa saadaan käyrä jonka pituus on ääretön. Tällaisia rajatulla alueella esiintyviä äärettömän pitkiä kappaleita ranskalainen matemaatikko Benoit Mandelbrot (*1924) alkoi kutsua fraktaaleiksi (engl. fractal).

Sana fraktaali tulee Latinan kielen sanasta fractus, joka tarkoittaa murtunutta, murrettua tai epäsäännöllistä. Samaa alkuperää ovat myös englanninkielen sanat fraction ja fragment.

Vaikka Mandelbrot ottikin käyttöön fraktaali-sanan, hän ei suinkaan ollut ensimmäinen fraktaaleja tutkinut matemaatikko. Jo vuonna 1904 ruotsalainen matematiikko Helge von Koch esitti edellä käsitellyn murtoviivan, joka on sittemmin tunnettu Kochin käyränä.

Fraktaalisten käyrien mittaaminen

Käyrän suuruus[1)] määritetään yleensä jakamalla käyrä osajanoihin ja laskemalla näiden pituudet yhteen. Samoin voidaan tasokuvion suurus määrittää jakamalla kuvio pieniin neliöihin ja laskemalla yhteen niiden sivujen toiset potenssit (neliön alahan on sen sivun toinen potenssi). Sama periaate toimii avaruuskappaleel-

1) Sanaa ”suuruus” käytetään tässä yhteisnimityksenä kokoa kuvaaville suureille kuten pituus, pinta-ala ja tilavuus.

la, kun jaetaan se kuutioihin ja lasketaan kuutioiden sivujen kolmannet potenssit yhteen. Näin voidaan verrata keskenään kappaleita, joiden ulottuvuuksien määrä on sama. Huomaa kuitenkin, että esimerkiksi yksiulotteisen käyrän pinta-ala on nolla ja tasokuvion pituus ääretön.

Samalla tavalla voidaan mitata myös fraktaalisia kappaleita: Jaetaan kappale osiin, joiden halkaisija on pienempi tai yhtä suuri kuin r siten että osia tulee mahdollisimman vähän. (kappaleen halkaisijalla tarkoitetaan suurinta mahdollista etäisyyttä sen kahden pisteen välillä.) Lasketaan näiden osien halkaisijat yhteen korotettuna potenssiin d. Raja-arvoa, jota tämä luku lähestyy, kun r lähestyy nollaa kutsumme kappaleen Hausdorff-mitaksi ja merkitsemme sitä h_d:lla.

$$h_d=\sum_{i=0}^{\infty} r_i^{\,d}=r_0^d+r_1^d+r_2^d+\ldots+r_\infty^d$$

Voidaan havaita, että kaavasta saadaan aina joko nolla tai ääretön, kun d poikkeaa kappaleen ulottuvuuksien lukumäärästä. Tätä voi kokeilla jakamalla esimerkiksi jana osiin ja laskemalla osien avulla h_d janalle, jonka pituus on s. Seuraavassa esimerkissä jana on jaettu N kappaleeseen yhtä suuria osia.

$$h_d=r_0^d+r_1^d+r_2^d+r_3^d+\ldots+r_N^d$$

Koska kaikki osajanat ovat yhtä pitkiä, niin

$$h_d=\left(\frac{s}{N}\right)^d\cdot N=\frac{N\cdot s^d}{N^d}=\frac{s^d}{N^{d-1}}$$

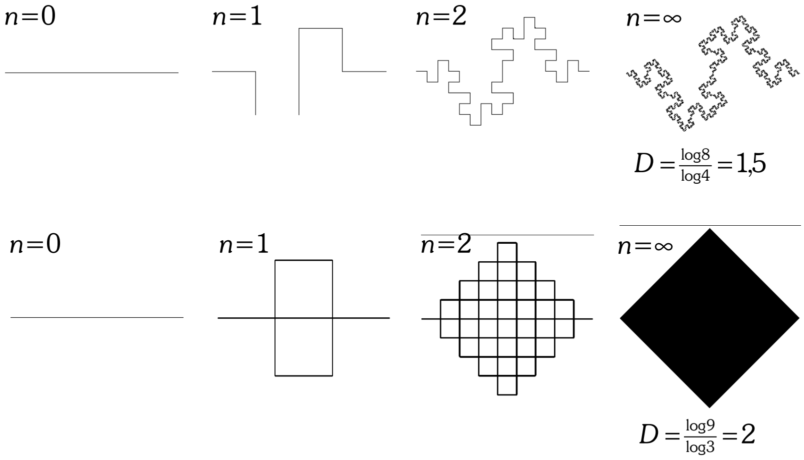
Havaitaan, että kun $d=1$, niin $h_d=\frac{N\cdot s}{N}=s$, N:n arvosta riippumatta. Kun taas $d>1$ antaa

$$\lim_{N\to\infty}\frac{s^d}{N^{d-1}}=0$$

toisin sanoen $\frac{s^d}{N^{d-1}}$ lähenee nollaa, kun N lähenee ääretöntä.

Ja kun $d<1$, niin

$$\lim_{N\to\infty}\frac{s^d}{N^{d-1}}=\infty,\ \text{eli}\ \frac{s^d}{N^{d-1}}$$



Kuva 23: *Fraktaalisia käyriä*

lähenee ääretöntä, kun N lähenee ääretöntä.

Sama voidaan todeta neliöllä, jonka halkaisija on s (Voidaan osoittaa, että taloudellisin tapa peittää neliö r-läpimittaisilla kappaleilla on käyttää säännöllisesti sijoitettavia pieniä neliöitä):

$$h=\left(\frac{s}{N}\right)^d\cdot N^2=\frac{N^2\cdot s^d}{N^d}=\frac{s^d}{N^{d-2}}$$

Voidaan vastaavasti todeta h:n olevan n:stä riippumaton jos ja vain jos d=2.

Sitä d:n arvoa, jolla h on n:stä riippumaton kutsutaan kappaleen Hausdorff-Besicovitch-dimensioksi[2]. Merkitsemme sitä D:llä. Vastaavasti merkitsemme h_D:tä H:lla. Euklidisille kappaleille $D=D_T$, kun D_T:llä merkitään kappaleen topologista dimensiota eli ulottuvuuksien lukumäärää (käyrälle $D_T=1$, pinnalle $D_T=2$) D:n ja H:n merkitys tuleekin esille vasta fraktaalisten käyrien yhteydessä.

Esimerkki:

Määritä Kochin käyrän Hausdorff-Bisicovitch dimensio.

Ratkaisu:

Approksimoidaan murtoviivalla Kochin käyrää, jonka päiden välinen etäisyys on s. Kun edellä esitetty janan korvaaminen murtoviivalla suoritetaan n kertaa, voidaan saatua käyrää kutsua Kochin käyrän n asteen approksimaatioksi. n asteen approksimaatio koostuu 4^n:stä osajanasta, joiden pituus on $\frac{s}{3^n}$. Kun jokainen osajana korvataan ympyrällä, jolla on yhtä suuri halkaisija, saadaan kappale, joka peittää Kochin käyrän. Tällöin Kochin käyrän Hausdorff-mitaksi saadaan:

$$h=\left(\frac{s}{3^n}\right)^D\cdot 4^n$$

$$h=\frac{s^D}{\left(3^n\right)^D}\cdot 4^n=\frac{s^D\cdot 4^n}{3^{nD}}$$

Otetaan yhtälöstä puolittain logaritmi.

$$\log h=D\log s+n\log 4-nD\log 3$$

$$\log h=D\log s+n\left(\log 4-D\log 3\right)$$

$h\to 0$ tai $h\to\infty$

jos ja vain jos

$\log h\to\infty$ tai $\log h\to-\infty$.

joten

$$\log 4-D\log 3=0$$

$$\Leftrightarrow D=\frac{\log 4}{\log 3}$$

Vastaus:

$$D=\frac{\log 4}{\log 3}\approx 1{,}262859507$$

Tämän avulla voidaan las-

2) Olemme määritelleet Hausdorff-mitan ja Hausdorff-Besicovitch-dimension esimerkin avulla, sillä niiden oikeaoppinen määritelmä on turhan monimutkainen tässä esitettäväksi. Se on kuitenkin havainnollisesti selitettynä K. J. Falconerin kirjassa "Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications" (1990).

kea myös Kochin käyrän Hausdorff-mitta:

$$\log H = D\log s + n(\log 4 - D\log 3)$$
$$\Leftrightarrow \log H = D\log s$$
$$\Leftrightarrow H = 10^{D\log s} = s^D$$

(Näin käytettäessä kymmenkantaista logaritmia – voit käyttää myös muita logaritmeja, kunhan vaihdat kantaluvun oikeaksi.)

Voidaan osoittaa, että mille tahansa kappaleelle pätee $D_T \le D \le D_S$, missä D_S on sen avaruuden ulottuvuusluku, jossa käyrä esiintyy. Tämä voidaan yleistää siten, että kappaleen K Haussdorf-Besicovitch-dimensio on suurempi tai yhtä suuri kuin minkä tahansa K:n osajoukon ja pienempi tai yhtä suuri kuin minkä tahansa kappaleen, joka voidaan esittää K:n muotoisen kappaleiden unionina.

Nyt voidaan määritellä fraktaali uudestaan kappaleeksi, jonka Hausdorff-Besicovitch-dimensio on suurempi kuin sen topologinen dimensio.

$$D > D_T$$

Muita dimensioita

Hausdorff-Besicovitch-dimension lisäksi on muitakin ns. fraktaalidimensioita, joilla voidaan kuvata kappaleiden ominaisuuksia. Useimmissa tapauksissa nämä ovat keskenään yhtäpitäviä, mutta on tapauksia, joissa ne saavat erisuuria arvoja. Monet niistä eroavat toisistaan kuitenkin vain määritelmältään. Näistä määritelmistä ja nimityksistä monet lähteet antavat ristiriitaista tietoa, eikä niitä käsitellä tässä.

Määrittelemme ns. Monimutkaisuusdimension (engl. similarity dimension) itseään eri mittakaavoissa toistavalle fraktaalille. Itseään toistava fraktaali voidaan muodostaa ns. aksiooman ja tuotantosäännön avulla. Aksiooma on tuottamisen lähtökohta ja tuotantosääntö kertoo miten kappaleen osia korvataan toisilla, esimerkiksi Kochin käyrän tapauksessa aksiooma on jana, ja tuotantosääntö on janan korvaaminen em. neljästä osajanasta muodostuvalla murtoviivalla. Määrittelemme nyt:

$$D_F = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}},$$

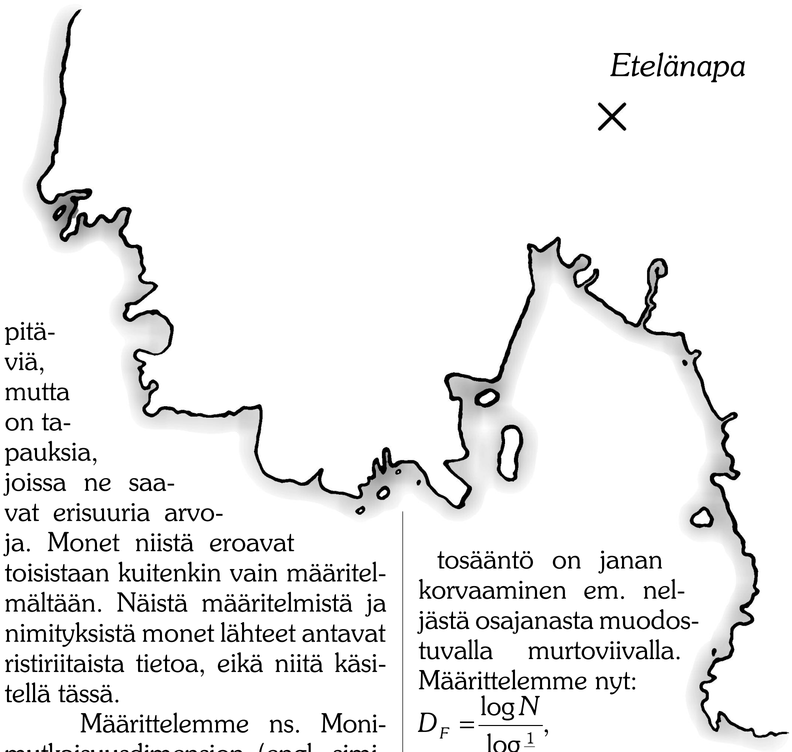
missä N on osajanojen määrä janan paikalle asetettavassa murtoviivassa, ja r niiden pituus suhteessa käyrän päiden väliseen etäisyyteen.

Dimensio kuvaa tässä tapauksessa itse asiassa käyrän monimutkaistumista tarkastelu mittakaavan kasvaessa. Se voidaan yleistää koskemaan kaikenlaisia käyriä:

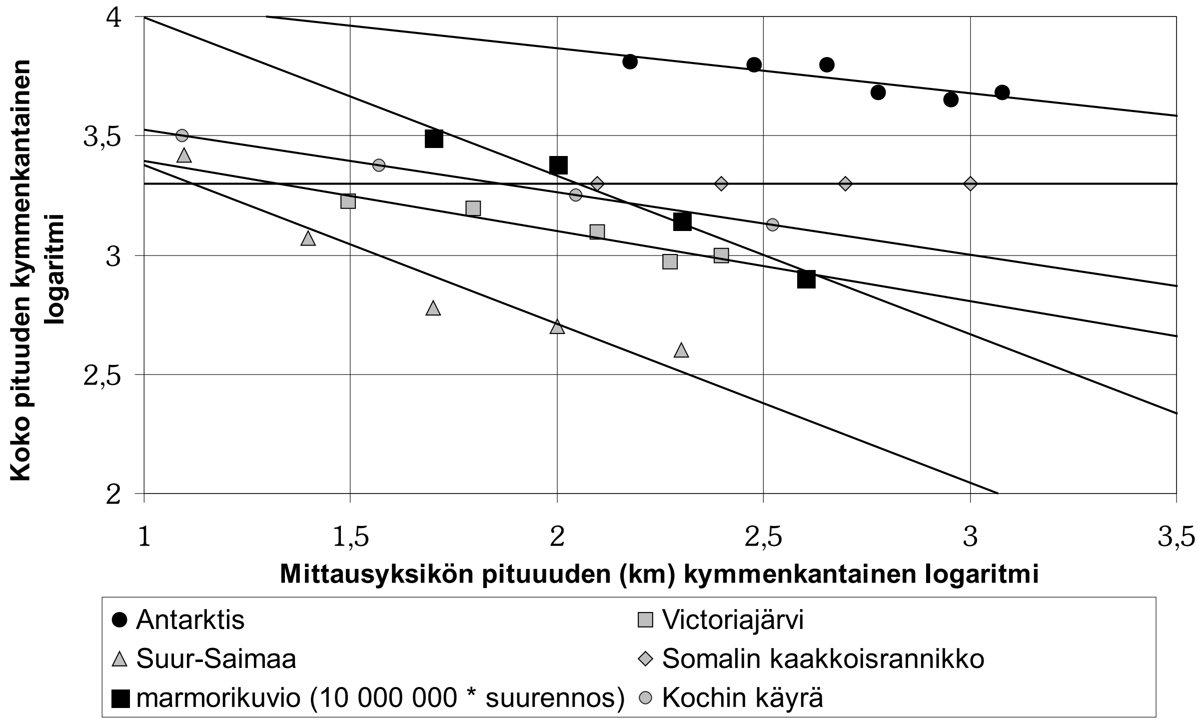
$$D_F = \lim_{r\to 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}},$$ missä N on niiden r-säteisten pallojen määrä, joka tarvitaan käyrän peittämiseen.

Monissa tapauksissa kuten Kochin käyrän kohdalla, $D=D_F$, minkä lukija voi halutessaan laskea. Monimutkaisuusdimensio ja Hausdorff-Besicowitch-dimensio eivät ole sama asia, mutta ne ovat useimmissa tapauksissa yhtä suuret, minkä johdosta monimutkaisuusdimensiota käytetään usein Hausdorff-Besicowitch-dimension arvaamiseen silloin kun sen laskeminen on huomattavasti vaikeampaa. Tapauksia, joissa tämä ei ole mahdollista, ei käsitellä tässä artikkelissa.

Kuva 24a: *Etelämantereen rantaviivaa*



Kuva 24b: *Eri hienoja lumikiteitä*



Kuva 25: *Rantaviivojen pituuksien logaritmin riippuvuus mittajanan pituuden logaritmista. (D=1-k, missä k tarkoittaa suoran kulmakerrointa.)*

Harjoitus 1:

a) Nk. Cantorin joukko syntyy kun jana jaetaan kolmeen osaan, ja niistä poistetaan keskimmäinen. Sama toistetaan jäljelle jääneille kahdelle alkuperäisen janan kolmasosalle. jne. Määritä Cantorin joukon monimutkaisuusdimensio ja Hausdorff-Besicowitch-dimensio edellisen kappaleen perusteella.

b) Määritä säännöllisen p-kulmion monimutkaisuusdimensio .

c) Muodostetaan yleinen Cantorin joukko seuraavasti: Otetaan jana, jonka pituus on *r*. Poistetaan siitä pätkä, jonka etäisyys janan päätyyn on *ar*, ja jonka pituus on *br*. Määritä tämän joukon monimutkaisuusdimensio a:n ja b:n suhteen.

Dimension käsite

Sana dimensio saattaa aluksi tuntua harhaanjohtavalta (engl. dimension ⇔ ulottuvuus), mutta se on hyvin perusteltavissa. Hausdorff-Besicovitch-dimensiolla on monia yhteisiä piirteitä euklidisten (eli ”epäfraktaalisten”) kappaleiden ulottuvuusluvun kanssa, ja itse asiassa monissa tapauksissa euklidista dimensiota voidaan pitää Hausdorff-Besicovitch-dimension erikoistapauksena. Esimerkiksi euklidisten kappaleiden suuruuden (pituus, pinta-ala, tilavuus ...) kasvaminen mittakaavan mukana riippuu kappaleen ulottuvuusluvusta. Yksiulotteisen kappaleen pituus on verrannollinen suurennossuhteen ensimmäiseen potenssiin, tasokuvion ala on verrannollinen suurennossuhteen neliöön ja vastaavasti tilavuus sen kuutioon. Samoin fraktaalisen kappaleen suuruus (Hausdorff-mitta) on verrannollinen mittakaavan D:nteen potenssiin. Hausdorff-mitta vastaa myös sikäli euklidisia mittoja, että kappaleen neljäsosan Hausdorff-mitta on neljäsosa koko kappaleen mitasta. (Huom. laskettaessa Kochin käyrän murto-osien pituuksia edellä johdetulla kaavalla $h=s^D$ on muistettava, että Kochin käyrän neljäsosan päiden välinen etäisyys on kolmasosa alkuperäisen käyrän pituudesta.) Hausdorff-Besicovitch-dimensio kuvaa myös sitä, kuinka hyvin kappale täyttää avaruuden. Esimerkiksi kuvassa 23 alemman käyrän topologinen dimensio on 1, mutta sen Hausdorff-Besicovitch-dimensio on 2. Tämä käyrä kulkee rajatun tasoalueen jokaisen pisteen kautta.

Fraktaale a luonnossa

Luonnon ilmiöiden mallintaminen on yksi fraktaaligeometrian tärkeimmistä sovelluksista. Luonto on täynnä fraktaaleja muistuttavia kohteita. (Nykyisten teorioiden mukaan maailmankaikkeus koostuu jakamattomista perushiukkasista, joten minkään luonnossa esiintyvästä ei voida käyttää termejä *fraktaali* tai fraktaalinen, mutta luonnontieteilijän mittakaavassa niitä voidaan useimmiten käsitellä fraktaaleina.) Monet kasvit näyttävät fraktaalisilta, samoin pilvet, galaksit ja hiukkasten liikeradat. Rantaviiva lienee kuitenkin kaikkein tunnetuin esimerkki luonnon ”fraktaalista”.

Vaikka monet kartta- ja

tietosanakirjat ilmoittavatkin maiden kohdalla niiden rantaviivan pituuden sekä paljonko yhteistä rajaa niillä on rajanaapureidensa kanssa, ei näillä luvuilla ole mitään merkitystä niin kauan kuin niiden yhteydessä ei ilmoiteta mittaustarkkuutta. Rantaviivan näennäinen pituus on nimittäin täysin riippuvainen mittaustarkkuudesta. Kun laiva seuraa rannikkoa, se kulkee paljon lyhyemmän matkan kuin rantatietä kulkeva kävelijä, koska laivan, toisin kuin kallioseinämään hakatun tien, ei tarvitse poiketa jokaiseen lahdenpohjukkaan. Ja jos halutaan vielä tarkempia mittoja, voidaan kiertää jokaisen hiekanjyväsen ympäri.

Todellisten kappaleiden fraktaalidimensiot

Rantaviivan Monimutkaisuusdimensiota voi arvioida esimerkiksi approksimoimalla sitä murtoviivoilla, joiden kaikki osajanat ovat yhtä pitkiä kuten kuvassa 22a. Monimutkaisuusdimensio on tällöin

$$D_F = \frac{\log \Delta N}{\log \frac{1}{\Delta r}} = 1 - \frac{\log \Delta Nr}{\log \Delta r},$$

missä Nr on koko käyrän pituus mitattuna mittajanalla, jonka pituus on r. (Kaava on em. fraktaalidimension kaavan muunnos, joka sallii minkä tahansa pituusmittayksikön käyttämisen r:n ilmoittamiseen. Se tuo myös paremmin esille rantaviivan pituusmuutoksen kuinmääritelmässä käyttämämme monimutkaisuusdimension kaava.) ΔNr merkitsee Nr:n muutosta, kun r muuttuu Δr verran. Paras tulos saadaan, kun tehdään useita mittauksia ja etsitään graafisesti mittaustuloksia parhaiten kuvaava suora. monimutkaisuusdimensio on itse asiassa $D=1$-k, missä k on tämän suoran kulmakerroin.

Harjoitus 2:

Määritä kuvan 25 perusteella siinä esitettyjen rantaviivojen Monimutkaisuusdimensiot.

Harjoitus 3:

Määritä kuvan 24B lumikidemuodostelman monimutkaisuusdimensio .

Monimutkaisuusdimension voi määrittää myös piirtämällä käyrän ruutupaperille ja laskemalla monenko ruudun kautta se kulkee, tai laskemalla montako tietyn kokoista ympyrää tai neliötä sen peittämiseen tarvitaan. Ruutujen tai ympyröiden halkaisijan ja niiden määrän välillä on vastaava yhteys kuin osajanojen pituuksilla ja määrällä

Korkeampia ulottuvuuksia

Siinä missä rantaviivan tai maanpinnan korkeuskäyrän pituus on ääretön, voidaan myös mantereen pinta-alan katsoa olevan ääretön. Maanpinnan monimutkaisuusdimensio määrittäminen ei ole aivan yhtä yksinkertaista kuin rantaviivan, mutta se onnistuu samalla periaatteella: joko approksimoimalla maanpintaa yhä pienemmillä kolmioilla, mikä on käytännöllisempi tapa, tai jakamalla tila pieniin kuutioihin kuten taso jaettiin neliöihin. Jälkimmäinen tapa on käytännöllinen, kun kohteena on esimerkiksi pilvi, jonka vesipitoisuus on mitattu sen jokaisessa pisteessä. Joka tapauksessa fraktaalisten pintojen dimensioiden kokeellinen määrittäminen on työlästä ilman tietokonetta.

Sovelluksia

Uuden ajattelutavan lisäksi fraktaaligeometria on johtanut moniin käytännön sovelluksiin. Sen perusteella on kehitetty mm. yksittäisten kaasumolekyylien liikkeeseen ja ääneen liittyviä laskentamenetelmiä. Fraktaaligeometrian tuomaa tietoa maan pinnanmuodoista on myös käytetty menestyksellisesti esimerkiksi luonnollisen näköisten maisemien luomiseksi avaruusaiheisiin elokuviin.

Fraktaaleja on kaikkialla. Niiden avulla voidaan kuvata lähes kaikkea elävistä organismeista galaksien muotoihin sekä massan keskittymiseen universumissa. Kaikkein mielenkiintoisinta on, että jopa puhtaat matemaattiset laskutoimitukset voivat synnyttää fraktaaleita. Tästä esimerkkinä ovat ns. Julian joukot, joista voi lukea lisää esimerkiksi em. K. J. Falconerin kirjasta.

ST

Termejä

approksimoida	Muodostaa approksimoitavan kappaleen muotoa lähestyviä annetut ehdot täyttäviä yksinkertaisempia kappaleita.
kappale	Tässä artikkelissa: yleisnimitys sanoille pistejoukko, käyrä, avaruuskappale jne.
suuruus	käytetään tässä yhteisnimityksenä kokoa kuvaaville suureille kuten pituus, pinta-ala ja tilavuus
$\lim_{x \to a} f(x)$	Raja-arvo, jota $f(x)$ lähestyy, kun x lähestyy a:ta.
$\sum_{x=a}^{b} f(x)$	$= f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b)$

Vastaukset: 1. a) $D = D_F = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}6309$ **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\log pr^n}{\log r^n} = 1$ **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log\left(\frac{a+(1\ \ b\ \ a)}{2}\right)^n} = \frac{\log 2}{\log \frac{1\ \ b}{2}}$ **2.** Antarktiksen rannikko: 1,19, Victoriajärvi: 1,26, Suur-Saimaa: 1,67, Somalian kaakkoisrannikko: 1,02, Marmorikuvio: 1,66, Kochin käyrä: 1,36 **3.** $D \approx 0{,}58$