

# Fibonaccin illuusio

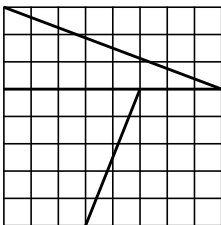
Fibonaccin lukujonolla tarkoitetaan jonoa, jonka 1. ja 2. luku ovat ykkösiä, ja muut luvut saadaan laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen. Se on saanut nimensä 1200 luvulla eläneen Fibonacci kutsutun Leonardo Pisalaisen mukaan. Fibonacci luvuista käytetään yleensä merkintää, jossa  $n$ :s luku on  $F_n$ . Jonoon katsotaan joskus kuuluvaksi myös luku  $F_0=0$ . Fibonacci jonoon kuuluvista luvuista käytetään yhteisnimitystä Fibonacci luvut. Lukujonoja, jotka muodostetaan samoin kuin Fibonacci jono, paitsi että kaksi ensimmäistä jäsentä voivat olla mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja kutsutaan yleistyksi Fibonacci jonoiksi.

Fibonacci lukuihin liittyy seuraavia mielenkiintoisia ominaisuuksia

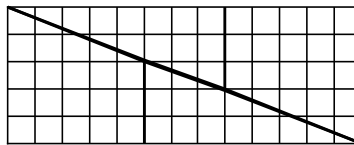
1.  $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n, n \geq 1$
2.  $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
3.  $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$
6. Joka  $n$ :s Fibonacci luku on jaollinen  $F_n$ :llä.
7.  $\text{syt}(F_n, F_{n+1}) = 1$
8.  $\frac{F_n}{F_{n+1}}$  lähenee kultaista leikkausta kun  $n$  lähenee ääretöntä.

Ominaisuuteen 1 liittyy seuraava kuuluisa illuusio:

Leikataan ruutupaperista shakkilaudan kokoinen, eli  $8 \times 8 = 64$  ruudun neliö, ja paloittelallaan se seuraavan kuvan osoittamalla tavalla:



Palaset irroittaa toisistaan voidaan järjestää uudestaan siten, että ne muodostavat seuraavan laisen kuvion:



Kuvion sivut ovat 5 ja 13 ruutua, joten sen pinta-alaksi saadaan 65 ruutua! Jomman kumman kuvion ala on siis laskettu väärin. Jälkimmäinen kuvio ei itse asiassa olekaan suorakaide. Sen keskellä on hyvin kapea suunnikkaan muotoinen aukko, jonka pinta-ala on 1. Tämän suunnikkaan kärkipisteet ovat myötöpäivään A, C, D ja B. Virheen voi havaita jo siitäkin, että kappaleiden vinojen sivujen kulmakertoimet ovat erisuuruiset ( $-\frac{3}{8}$  ja  $-\frac{5}{2}$ ).

Virheen vaikea havaittavuus perustuu siihen, että 5, 8 ja 13 ovat kolme peräkkäistä Fibonacci lukua, joista keskimäisen neliö poikkeaa ominaisuuden 1 mukaan yhdellä sen kummallakin puolella sijaitsevien lukujen tulosta. Poikkeaman suunta riippuu siitä, onko keskimäisen luvun järjestysluku parillinen vai pariton, ja siksi illuusio toteutuukin parhaiten parillista astetta olevilla Fibonacci luvuilla. Illuusio tulee sitä vakuuttavammaksi, mitä suurempia lukuja käytetään. Esimerkiksi kun valitaan luvut 13, 21 ja 34, saadaan "pinta-aloiksi" 442 ja 441. Suunnikkaan leveydeksi tulee tällöin vain 0,4.

**Sampo Tiensuu**

# Fyllot Leh

Kultainen leikkaus ja Fibonacci luvut esiintyvät luonnossa lähes kaikkialla. Joskus niiden merkitys on selvä, kuten esimerkiksi kuvattaessa eläinpopulaation kokoa, mutta kun ne löytyvät kasvin siementen lukumääristä tai niiden osien kokosuhteista, yhteys näyttää lähinnä sattumalta. Kasveilla on kuitenkin hyvät evolutiiviset perusteet noudattaa näitä lukuja. Erityisesti ne ilmenevät samankaltaisten kasvin osien keskinäisessä sijoittumisessa eli fyllotaksiassa. Kasvien lisäksi samaa teoriaa voidaan soveltaa esimerkiksi simpukankuorten täpliin tai muurahaiskävyin suomiin.

Esimerkiksi auringonkukan tai päivänkakkaran mykerössä siemenet näyttävät sijoittuvan spiraaleihin, joista toinen kiertää myötöpäivään ja toinen vastapäivään. Näiden spiraalien lukumäärät ovat lähes poikkeuksetta peräkkäisiä Fibonacci lukuja. Luvut vaihtelevat kukinnan koon mukaan: Keskikokoisissa auringonkukan mykeröissä on yleensä nähtävissä 34 toiseen suuntaan ja 55 toiseen suuntaan kaartuvaa spiraalia. Suuremmissa nämä luvut saattavat olla 55 ja 89, tai jopa 89 ja 144. Pienemmissä puolestaan 21 ja 34 tai 13 ja 21. Yleisesti, jos mykerössä näkyy  $m$  spiraalia myötöpäivään ja  $n$  vastapäivään, sillä sanotaan olevan  $(m, n)$  fyllotaksia.

Auringonkukan mykeröiden on havaittu noudattavan yksinkertaista mallia, jonka mukaan jokainen kukka sijaitsee aina samassa kulmassa ( $\delta$ ) edelliseen nähden. Tätä kulmaa kutsumme poikkeamakulmaksi. Tällöin  $N$ :nen kukan paikka voidaan ilmaista napakoordinaatistossa seuraavasti:

$$\begin{aligned} \phi &= \delta \cdot N, \\ r &= c\sqrt{N}, \end{aligned} \quad (1)$$

# aksia tien lukuteoriaa

missä  $\phi$  on sen positiivisen  $x$ -akselin kanssa muodostama kulma ja  $r$  sen etäisyys origosta.  $c$  on kukkien koosta riippuva vakio, joka määrää etäännyksen nopeuden keskipisteestä. (Kuva 1)

Kaikki kukat sijaitsevat spiraalilla, jonka lauseke saadaan yhtälöstä (1), kun  $N$ :lle annetaan kaikki positiiviset Reaalilukuarvot. Tätä spiraalia kutsumme tuotantospiraaliksi. Yhtälön (1) esittämän spiraalin valinta on perusteltua. Tällöin kukat sijoittuvat yhtä tiheästi kaikilla etäisyyksillä keskustasta, koska minkä tahansa säteen sisään jäävien kukkien määrä on tällöin verrannollinen vastaavan ympyrän pinta-alaan, joka puolestaan on verrannollinen säteen neliöön. Tällaista spiraalia kutsutaan syklotronispiraaliksi<sup>1)</sup>. Tuotantospiraalille voidaan käyttää muitakin lausekkeita. Esimerkiksi Arkimedeen spiraali, jossa  $r = cN$  antaa paremman kuvan kehittyvästä mykeröstä, jossa reunakukat ovat pidemmälle kehittyneitä kuin kukat keskustassa.

Lähes kaikissa kasveissa havaitaan poikkeamakulma:

$$\delta = \frac{360^\circ}{\tau^2} = \frac{360^\circ}{\tau + 1} \quad (2)$$

$$\delta \approx 137,507764^\circ,$$

missä  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$ , eli kultaisen leikkauksen suhde! Auringonkukassa näyttäisi siis esiintyvän sekä kultainen leikkaus että Fibonaccin luvut ilman mitään selvää syytä.

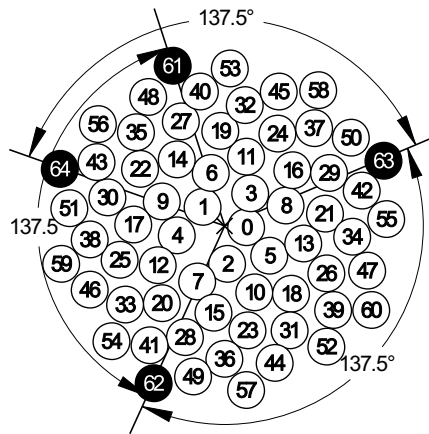
Sama ilmiö esiintyy lehtien asetumisessa varren ympäri. Lehdet näyttävät kiertävän varren ympäri siten, että päällekkäin osuvien lehtien väli olisi aina jonkin Fibonaccin luvun ilmoit-

tama määrä lehtiä. (Itse asiassa lehdet eivät koskaan asetu täysin päällekkäin, sillä  $\delta$  on irrationaalinen.)

On monia syitä siihen miksi evoluutio on suosinut näitä lukuja. Mykerössä on edullisinta olla mahdollisimman monta siementä pinta-alayksikköä kohti, ja lehtien tulisi sijaita mahdollisimman kaukana toisistaan, jotta ne kaikki saisivat riittävästi valoa eivätkä varjostaisi toisiaan. Voidaan osoittaa, että Fibonaccin lukuja ja kultaista leikkausta noudattamalla kasvit saavuttavat itselleen edullisimman rakenteen.

## Erilaisia spiraaleja

Saattaa vaikuttaa oudolta, että mykerön koon kasvaessa spiraalien määrä muuttuu hyppäyksittäin, vaikka kasvu olisikin tasaista. Itse asiassa spiraalit eivät lainkaan synny ja katoa, vaan kaikki spiraalisarjat ovat olemassa koko ajan. Mykeröstä hahmottuvat kuitenkin parhaiten ne spiraalit, joihin kuuluvat kukat koskettavat toisiaan. Tällaisten spiraalien sanotaan olevan yhtenäisiä. Samaan spiraaliin kuuluvien peräkkäisen kukkien järjestysnumeroitten erotus on aina vakio. Spiraalia,



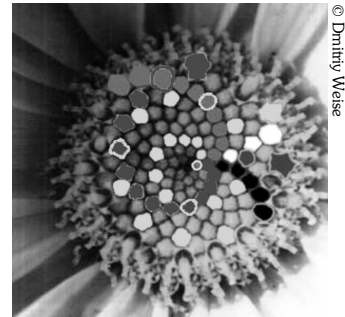
Kuva 1: Kaavakuva mykerön keskustasta.

jolle tämä erotus on  $m$  sanotaan  $m$ -spiraaliksi. Kukinnon kaikki  $m$ -spiraalit muodostavat  $m$ -spiraalisarjan, jossa on  $m$  rinnakkaista spiraalia. Kaikkien tietyn spiraalin kukkien järjestysluvut kuuluvat siis samaan jäännösluokkaan (mod  $m$ ).

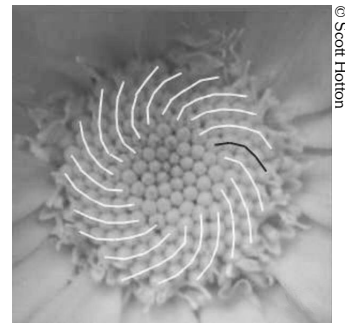
Saman spiraalin kukkien välimatkaan vaikuttaa säteen  $r$  muutos toisesta toiseen siirryttäessä. Koska  $r$  ilmaistetaan neliöjuurifunktiolla, tämä on luonnollisesti sitä pienempi, mitä kauempana keskustasta kukat sijaitsevat. Etäisyyteen vaikuttaa toisaalta myös kukkien välinen kulma. Tiettyssä kulmassa toisiinsa nähden sijaitsevat kukat ovat sitä kauempana toisistaan, mitä kauempana ympyrän keskustasta ne sijaitsevat. Näin voidaan todeta, että jokin spiraalisarja on näkyvässä vain tietyllä etäisyysvälillä keskustasta.

Itse asiassa etäisyys keskustasta on ainoa spiraalien näkyvyyteen vaikuttava tekijä. Esimerkiksi kukkien koolla tai määrällä ei ole merkitystä.

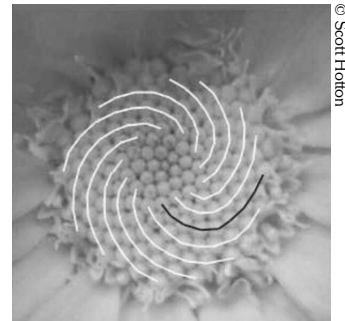
Kukinnon kasvaessa reuna-alueelle syntyvän uuden spiraalisarjan spiraalin määrä on aina kahden edellisen spi-



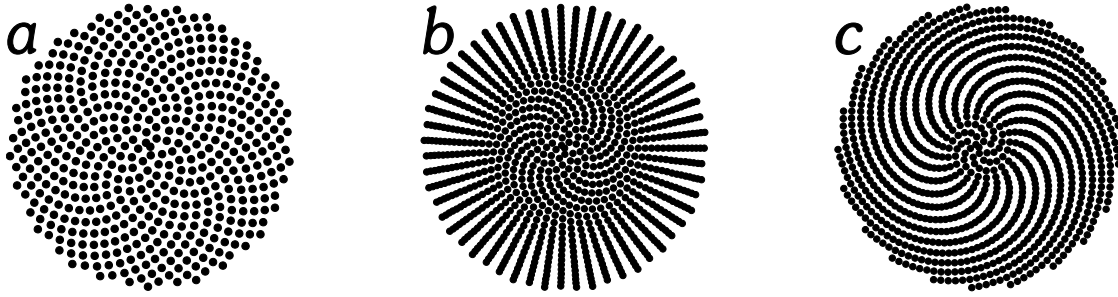
Kuva 2: Eri spiraalisarjoihin kuuluvia spiraaleja, joista jotkut ovat yhtenäisiä, jotkut eivät.



Kuva 3: Spiraaleja Candula Officialesksen mykerössä. Ylempään kuvaan on merkitty kaikki 21- ja alempana 13-spiraalisarjojen spiraalit.



1) Nimitys johtuu siitä, että syklotronissa kulkeva hiukkanen noudattaa tätä spiraalia silloin kun sen nopeus on niin pieni, että suhteellisuusteoria voidaan jättää huomiotta. Syklotroni, ks. Seepia 2 s. 14–22.



**Kuva 4:** Kukkien sijoittuminen mykerössä liittyy pakkaamisongelmaan. Tehokkaassa pakkaamisessa tila jakaantuu mahdollisimman tasaisesti kukkien kesken. Kaikkein suurin pakkaamistehokkuus ( $\eta \approx 0,8169$ ) saavutetaan poikkeamakulmalla  $\delta \approx \tau \cdot 360^\circ \approx 137,5077$  (vasemmalla). Kukat mahtuvat huonommin, kun käytetään  $\tau$ :n rationaalista approksimaatiota  $\delta = \frac{21}{55} \cdot 360^\circ = 137,454545\dots$  (keskellä) tai irrationaalista approksimaatiota  $\delta = \frac{155 + \sqrt{13}}{414} \cdot 360^\circ \approx 137,9179$  (oikealla).

raalisarjan summa. Tämä spiraaleille ominainen ilmiö tunnetaan summautumisena.

Oletetaan että jollakin tietyllä etäisyysalueella mykerön keskustasta on havaittavissa  $m$  myötäpäivään ja  $n$  vastapäivään kiertävää spiraalia. Näihin sarjoihin kuuluu silloin  $m$  ja  $n$  spiraalia vastavasti. Kuvassa 5 kukat A ja D ovat yhteydessä toisiinsa ainoastaan kukkien B ja C välityksellä. Kukat A kukkaan B siirryttäessä on järjestysnumeroon lisättävä  $n$ , ja vastaavasti B:stä D:hen siirryttäessä on lukuun lisättävä  $m$ . Tällöin A:sta D:hen siirryttäessä on lisättävä vastaavasti  $n+m$ .

Mykerön kasvaessa kukat siirtyvät pitkittäissuunnassa lähemmäs toisiaan, jolloin A ja D kohtaavat ja uusi spiraalisarja tulee näkyviin. Tämän spiraalisarjan peräkkäisten kukkien järjestysnumeroiden erotus on  $m+n$ . Sillä etäisyydellä keskustasta, jolla  $m+n$  sarjan kukat ensimmäisen kerran kosketavat toisiaan, on havaittavissa kolme yhtenäistä spiraalisarjaa. Kauemmaksi siirryttäessä  $n$ - ja  $m$ -sarjoista pienempi lakkaa olemasta yhtenäinen ja häviää näkyvistä. Spiraalien lukumäärät eri alueilla keskustasta alkaen muodostavat siis lukujonon, jonka jokainen luku on kahden edellisen summa.

Tällaisista sarjoista yksinkertaisin on Fibonaccin jono (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...), joka, kuten aiemmin todettiin, esiintyy yli 92%:ssa kasveista. Toiseksi yleisin on noin 2%:ssa tapauksista esiintyvä ns. Lucas-

jono (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...), joka muodostetaan kuten Fibonaccin jono, mutta lähtien luvuista 1 ja 3.

## Sylinterimalli

Hieman toisenlainen yfllotaksia esiintyy esimerkiksi ananaksessa tai suovehkassa. Tässä mallissa kukkien voidaan ajatella sijoittuvan sylinterin pinnalle. Ne ovat siis aina yhtä kaukana sylinterin akselista. Kukkien paikka voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned}\phi &= \delta \cdot N, \\ r &= \text{vakio}, \\ H &= h \cdot N\end{aligned}\quad (4)$$

missä  $\phi$ ,  $r$  ja  $H$  ovat kukan sylinterikoordinaatit. Laskutoimitusten helpottamiseksi käytämme kulmayksikkönä radiaaneja ( $2\pi = 360^\circ$ ). Tällöin kulman lukuarvo on yhtä suuri kuin ympyrän kaarta pitkin kuljettu etäisyys sylinterin pinnalla.

Koska sylinterimallissa säde on vakio, ei poikkeamakulmaa ( $\delta$ ) tarvitse valita siten, että pakkaustehokkuus olisi optimaalinen millä tahansa säteellä. Itse asiassa  $\delta$  voi olla mikä tahansa reaaliarvo tietyllä välillä. Yleensä se on kuitenkin lähellä Fibonaccin kulmaa, sillä silloin fyllootaksia säilyttää tehokkuutensa, vaikka kukin muoto ja koko muuttuisivat kasvin kasvaessa, ja sylinteri voi myös olla eri kohdista eri paksuinen. Tästä seuraa, että myös sylinterifyllootaksiassa näkyvät spiraalisarjat ilmentävät yleensä Fibonaccin lukuja.

$\delta$ :n valinnan jälkeen tehtäväksi jää vielä määrittää kaavan

(4) muut vakiot sen mukaisiksi.

Kuva 4 esittää (3, 5) fyllootaksia ilmentävää auki leikattua sylinteriä. Eri vakioiden keskinäisten suhteiden määrittämisessä voidaan hyödyntää kahden kukasta 0 lähtevän spiraalin leikkauspisteiden välille piirrettyä kolmiota ja kosinilauseetta. Ne lukijat, jotka eivät halua seurata näitä matemaattisia perusteluja voivat hypätä suoraan alaotsikkoon ”Pakkaustehokkuus”.

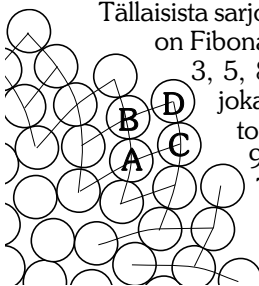
Merkitään kuvassa esiintyvistä spiraalisarjoista oikealle kiertävää  $m$ :llä ja vasemmalle kiertävää  $n$ :llä.

Kiertokulma kukasta 0 kukkaan  $m$  on määritelmän (4) mukaan  $\phi = \delta m$ . Tämä kulma voidaan ilmaista kahdessa osassa: [14]

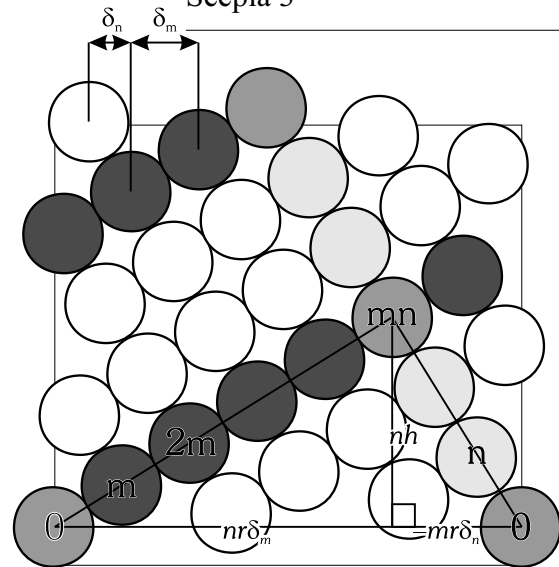
$$\delta m = \delta_m + \Delta_m \cdot 2\pi, \quad (5)$$

missä  $\Delta_m$  on  $\delta m$  täyskierröksinä ilmaistuna ja pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun, ja  $-\pi < \delta_m \leq \pi$  on 0:n ja  $m$ :n välinen ”todellinen kulma”, eli itseisarvoltaan pienin 0:n ja  $m$ :n välinen kulma<sup>2)</sup>. (Kukkien sijainti ilmaistaan sylinterikoordinaatistossa, joten kulmat ovat aina vaakasuuntaisia mittayksiköitä ja pituusmitat pystysuuntaisia.) Nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa vastaavasti toiselle spiraalisarjalle, kun  $m$ :t korvataan  $n$ :illä. Koska kukka  $n$  sijaitsee kukan 0 oikealla ja  $n$  vasemmalla puolella,  $\delta_m$  on luonnollisesti positiivinen ja  $\delta_n$  negatiivinen, sillä kukka  $n$  sijoittuu aina kukan 0 vasemmalle ja  $m$  oikealle puolelle. Koska

2) Tämän määritelmän mukaan  $\delta = \delta_1$ , sillä tuotantospiraali muodostaa 1-spiraalisarjan ainoan spiraalin.



**Kuva 5:**



**Kuva 6:** Auki leikattu sylinteri, jolla sijaitsevat ympyrät ilmentävät  $(m, n)$ -fyllotaksiia. Sylinteri saadaan, kun kuvan suorakaiteen oikea ja vasen reuna liimataan yhteen.

0-kukasta lähtevät  $m$ - ja  $n$ -spiraalit kohtaavat kukassa  $mn$ , saadaan:

$$n\delta_m - m\delta_n = 2\pi \quad (6)$$

(yhtälö on kirjoitettu vähennyslaskuna, sillä  $m\delta_n \leq 0$ ) Sijoittamalla  $\delta_m$  ja  $\delta_n$  yhtälöstä (5), saadaan vastaavasti:

$$n\Delta_m - m\Delta_n = 1 \quad (7)$$

Saamme lisää selville spiraalien geometriasta, kun sovellamme Pythagoraan lausetta kuvan 6 kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Näin saadaan:

$$(nr\delta_m)^2 + (mnh)^2 = (nd)^2 \quad (8)$$

$$(mr\delta_n)^2 + (mnh)^2 = (md)^2 \quad (9)$$

missä  $d$  on kukkien halkaisija, joka on yhtä suuri kuin saman spiraalin peräkkäisten kukkien välinen etäisyys kun kukat koskettavat toisiansa. Yhtälöt voidaan ratkaista  $d$ :n ja  $h$ :n suhteen:

$$h = \sqrt{\frac{\delta_m^2 - \delta_n^2}{n^2 - m^2}} \quad (10)$$

$$d = \sqrt{\frac{n^2\delta_m^2 - m^2\delta_n^2}{n^2 - m^2}} \quad (11)$$

Binomikaavaa käyttämällä (11) voidaan muuttaa muotoon:

$$d = \sqrt{\frac{(n\delta_m - m\delta_n)(n\delta_m + m\delta_n)}{n^2 - m^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi(n\delta_m + m\delta_n)}{n^2 - m^2}} \quad (12)$$

Yhtenäisten spiraalien välinen kulma saadaan kun merkitään  $m$ - ja  $n$ -spiraalisarjojen välistä kulmaa  $\gamma$ :lla, ja kun tiedetään, että kolmion kanta on  $\delta_m + \delta_n = 2\pi$ , voidaan kosinilauseen mukaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(2\pi r)^2 = (nd)^2 + (md)^2 - 2(nd)(md)\cos\gamma \quad (13)$$

Kolmas hyödyllinen kaava on ns. Heronin kaava, joka ilmaisee kolmion pinta-alan sen sivujen pituuksien avulla:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (14)$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat kolmion sivut ja  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , eli kolmion piirin puolikas. Kun tiedetään, että kolmion ala on  $A = \frac{1}{2}a(mnh)$ , voidaan yhtälöstä (14) ratkaista  $h$ :

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{amn} \quad (15)$$

Tästä voidaan ratkaista kuvan 6 kolmion korkeus, sillä

$$a = 2\pi r, \quad b = nd, \quad c = md \quad \text{ja} \\ p = \frac{1}{2}(nd + md + 2\pi r).$$

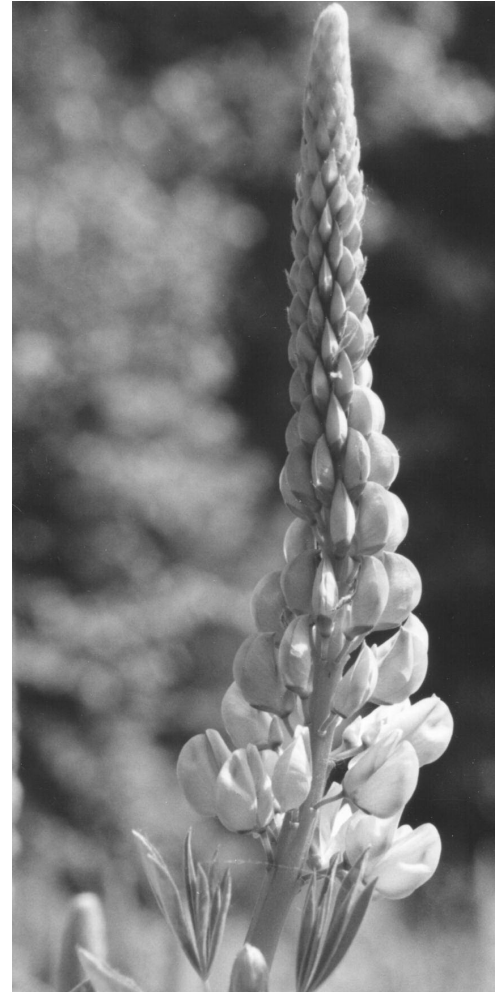
### Esimerkki:

Eräessä 2cm paksussa kuusenkävyssä havaittiin suomujen muodostavan 8 spiraalia toiseen suuntaan ja 5 toiseen. Kahden peräkkäisen suomun välimatka on noin 6,2mm. Määritä kahden peräkkäisen suomun välinen poikkeamukulma ( $\delta$ ) sekä pystypoikkeama ( $h$ ).

### Ratkaisu:

Tässä tapauksessa  $m=8$  ja

3) Diofantoksen yhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, jossa käytetään ainoastaan yhteen- kerto- ja potenssilaskutoimituksia, ja jonka kaikki vakiot ja tuntemattomat ovat kokonaislukuja. Muotoa  $ax + by = c$  olevaa yhtälöä kutsutaan lineaariseksi Diofantoksen yhtälöksi. Se on ratkeava jos ja vain jos  $\text{syta}(a, b)$  on  $c$ :n tekijä. Kun  $c=1$ , yhtälö ratkeaa jos ja vain jos  $a$  ja  $b$  ovat suhteellisia alkulukuja. Diofantoksen yhtälönratkaisemisesta Eukleideen algoritmilla käsitellään luki- on matematiikan kurssilla "Lukuteoria ja logiikka".



**Kuva 7:** Komealupiini (*Lupinus polyphyllus*) on tyypillinen esimerkki sylinteri fyllotaksiasta.

$n=5$ . Yhtälöstä (15) saadaan:

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-2\pi r)(p-md)(p-nd)}}{2\pi r mn}, \quad (16)$$

jossa

$$p = \frac{m+n}{2} \cdot d + \pi r \\ = \frac{8+5}{2} \cdot 6,2\text{mm} + \pi \cdot 10\text{mm} \\ = \pi \cdot 10\text{mm} + 40,3\text{mm} \\ \approx 7,17159\text{mm}$$

sijoittamalla nyt  $p$  kaavaan (16) saadaan:

$$h \approx 0,60275\text{mm} \approx 0,60\text{mm}$$

$\delta$ :n ratkaiseminen ei ole yhtä yksinkertaista. Se saadaan ensin on ratkaistava Diofantoksen yhtälö<sup>3)</sup> (7) sekä  $\delta_m$  tai  $\delta_n$  yhtälöistä (8) tai (9).

Emme tarvitse yhtälön (7) kaikkia ratkaisuja; – ainoastaan pienimmät positiiviset ratkaisut.

Ne on helppo arvata, mutta ne voidaan ratkaista myös Eukleideen algoritmilla. Näin saadaan:

$$\begin{cases} \Delta_m = 3 \\ \Delta_n = 2 \end{cases}$$

Yhtälöstä (8):

$$\delta_m = \sqrt{\frac{(nd)^2 - (mnh)^2}{(nr)^2}} \approx 0,62858$$

Kun  $\Delta_m$  ja  $\delta_m$  sijoitetaan yhtälöön (5) saadaan:  
 $\delta \approx 2,4348 \approx 139,502^\circ$

**Vastaus:**

$$h \approx 0,60mm$$

$$\delta \approx 139,5^\circ$$

Kuten havaittiin muiden vakioiden selvittäminen on melko yksinkertaista kun tunnetaan  $d$ ,  $h$  tai  $\delta$ , sekä yhtenäiset spiraalisarjat. Näitä arvoja ei kuitenkaan voida valita miten tahansa. Tietty spiraalisarja voi nimittäin olla yhtenäinen vain tietyillä  $d$ :n,  $h$ :n ja  $\delta$ :n arvoilla. Esimerkiksi  $h$ :n kasvessa tarpeeksi suurempi yhtenäisistä spiraalisarjoista menettää yhtenäisyytensä, sillä sen ja toisen yhtenäisen spiraalisarjan välinen kulma laskee alle  $60^\circ$ :n, jolloin kukat eivät yksinkertaisesti enää mahdu vierekkäin. ( $h$ :n kasvaminen vastaa tavallaan kuvion venymistä pystysuunnassa, paitsi että  $d$  kasvaa vastaavasti säilyttäen vierekkäisten kukkien kosketuksen mikäli mahdollista.) Vastaavasti  $h$ :n pienentyessä pienin spiraalisarja menettää yhtenäisyytensä kun  $\gamma$  ylittää  $120^\circ$ .  $h$ :lle ja  $\delta$ :lle voidaan siis määrittää arvoalueet, joilla tietty spiraalisarja voi olla yhtenäinen. Valittaessa arvot näiden alueiden reunalta, saadaan kukat sijoittumaan siten, että kolme spiraalisarjaa ovat yhtenäisiä. Tällöin niiden kaikkien väliset kulmat ovat  $60^\circ$ .

Nämä raja-arvot saadaan yhtälön (13) avulla, kun sijoitetaan  $\gamma = 60^\circ$ . Kun tiedetään, että  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , saadaan:

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 - mn + m^2}}$$

ja kun korvataan  $d$  yhtälöllä (12) voidaan kirjoittaa:

$$n\delta_m + m\delta_n = \frac{2\pi(n^2 - m^2)}{m^2 - mn + n^2},$$

mistä voidaan yhtälön (6) avulla ratkaista  $\delta_m$  ja  $\delta_n$ :

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{\pi(m+2n)}{m^2 - mn + n^2} \\ \delta_n &= \frac{\pi(2m+n)}{m^2 - mn + n^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Kun  $\delta_m$ :lle ja  $\delta_n$ :lle annetaan nämä arvot, ja määritetään muut arvot kuten edellä, saadaan fylloksiakuvio, jossa on 3 yhtenäistä spiraalisarjaa:  $m$ ,  $n$  ja  $|m-n|$ . Toinen raja, jolla yhtenäiset spiraalisarjat ovat  $m$ ,  $n$  ja  $m+n$  saadaan vastaavasti kun  $\gamma = 120^\circ$ . Tällöin  $60^\circ$  kulma esiintyy samoin kuin edellisessä tapauksessa, mutta ei  $m$ :n ja  $n$ :n vaan  $\max\{m,n\}$ :n ja  $m+n$ :n välillä. Koska  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$  saadaan vastaavasti:

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + mn + m^2}}$$

ja

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{\pi(m+2n)}{m^2 + mn + n^2} \\ \delta_n &= \frac{\pi(2m+n)}{m^2 + mn + n^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Nyt voidaan todeta, että spiraalisarjat  $m$  ja  $n$  voivat olla yhtenäisiä jos ja vain jos  $\delta_m$  ja  $\delta_n$  sijaitsevat lausekkeiden (17) ja (18) määrittämällä suljetulla välillä.

**Miksi  $\tau$ ?**

Poikkeamakulman  $\tau$  valin-

taa voi perustella monella tavalla.

Kasville olisi edullisinta, että kukat tai lehdet jakautuisivat mahdollisimman tasaisesti eri kulma-alueiden kesken kukkien määrstä tai mittakaavasta riippumatta. Tämän perusteella voidaan olettaa, että varteen syntyvä uusi lehti syntyy aina suurimpaan ole-massa olevaan ragoon kahden muun lehden välillä (a). Tasaisesta jakaumasta seuraa myös, että kukat sijaitsevat pienessä mittakaavassa samoin kuin suuressakin mittakaavassa. Näin on, jos uusi lehti jakaa sen välin, johon se syntyy samassa suhteessa, kuin  $\delta$  jakaa täyskulman (b).

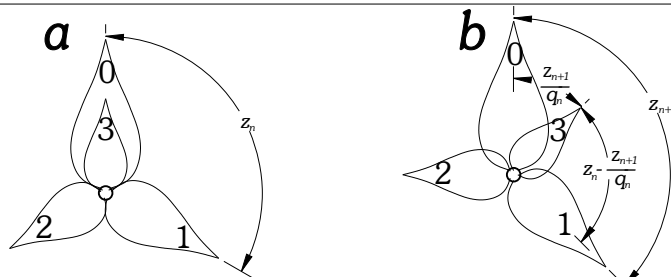
Näiden oletusten pohjalta voidaan johtaa kulman  $\delta$  optimaalisen arvo seuraavasti: [16]

Tarkastellaan varren ympärille asettuvien lehtien muodostamaa kuviota ylhäältä päin. (Kuva 8a) Merkitään  $z$ :lla kahden lehden välistä kulmaa kierroksina ilmaistuna. Toisin sanoen  $z = \frac{\delta}{360^\circ}$ .  $z$ :n on

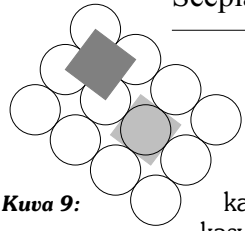
luonnollisesti oltava irrationaaliluku, sillä muutoin  $\phi$ :lla voisi olla vain äärellinen määrä arvoja, mikä johtaisi kukkien epätasaiseen jakautumiseen (kuva 1). Sitä voidaan kuitenkin lähestyä rationaalisilla likiarvoilla siten, että uusi arvo on aina lähempänä  $z$ :n todellista arvoa kuin edellinen. Olkoon

$$z_n = \frac{p_n}{q_n}$$

$p_n$  ja  $q_n$  ovat suhteellisia alkulukuja ts. niillä ei ole yhteisiä tekijöitä. Arvataan jokin likiarvo  $z$ :lle ja merkitään sitä  $z_0$ :lla. Esim.  $z_0 = \frac{1}{3}$  ts.  $p_0 = 1$  ja  $q_0 = 3$ . Lehdet osuvat kohdakkain aina  $q_n$  lehden välein, jolloin on käännytty yhteensä  $p_n$  täyskierrosta (koska  $z_n \cdot q_n = p_n$ , joka



**Kuva 8:** Siirtyminen  $z_n$  approksimaatiosta  $z_n$  arvoon  $z_{n+1}$ . Kuvat on piirretty siten, että  $n=0$  ja  $z_n = z_0 = \frac{1}{3}$ . Kuvasta **b** näkyy, kuinka lehti 3 jakaa lehtien 0 ja 1 välin suhteessa  $z_{n+1} : 1 - z_{n+1}$ .



Kuva 9:

on kokonaisluku).  $q_n$ :s lehti osuu siis kohdakkain 0:n lehden kanssa jne.

Lehtien kohdakkain sattumisen välttämiseksi kasvatetaan likiarvoa hieman. Merkitään tätä uutta likiarvoa  $z_{n+1}$ :llä.  $q_n$ :s lehti sijoittuu tällöin ylhäältä katsottuna lehden 0 ja sitä lähinnä olevan lehden väliin jakain sen oletuksen b mukaisesti suhteessa  $z_{n+1} : 1 - z_{n+1}$ . (huomaa, että ylhäältä katsottuna 0:aa lähin lehti ei välttämättä lehti 1) Tämän välin suuruus on aina  $\frac{z_n}{p_n} = \frac{1}{q_n}$  ( $=z_n$ , kun  $p_n = 1$  eli kun lehti numero 0 on lähinnä lehteä numero 1). Tällöin  $q_n$ :nen lehden kierokulma ei enää olekaan  $p_n \cdot 360^\circ$  vaan  $(p_n + \frac{1}{q_n} \cdot z_{n+1}) \cdot 360^\circ = q_n z_{n+1} \cdot 360^\circ$  ( $q_n$ :nen lehden paikka ympyrän kehällä saadaan kun käännytään  $q_n$  kertaa  $z_{n+1} \cdot 360^\circ$ )  
Ratkaistaan  $z_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} p_n + \frac{z_{n+1}}{q_n} &= q_n z_{n+1} \\ \Leftrightarrow p_n q_n + z_{n+1} &= q_n^2 z_{n+1} \\ \Leftrightarrow p_n q_n &= (q_n^2 - 1) z_{n+1} \\ \Leftrightarrow z_{n+1} &= \frac{p_n q_n}{q_n^2 - 1} \end{aligned}$$

Toisaalta kuitenkin  $z_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ , joten

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n q_n}{q_n^2 - 1} \quad (3)$$

Kun valitaan  $z_0 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow p_0 = 1 \wedge q_0 = 3$ , niin (3) on tosi jos ja vain jos  $p_n$  ja  $q_n$  ovat peräkkäisiä parillista järjestyslukua olevia Fibonaccin lukuja. Tämä ominaisuus voidaan johtaa Fibonaccin lukujen perusominaisuudesta 1 (kss. 30).

$z$ :n arvo saadaan, kun tiedetään, että peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhde lähenee kultaista leikkausta, kun luvut lähenevät ääretöntä.

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} \quad 3) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

3) Koska

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{1}{\tau^2} = 1 - \frac{1}{\tau} \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{360^\circ}{\tau^2} \approx 137,5^\circ \end{aligned}$$

## Pakkaustehokkuus

Kolmas tapa lähestyä  $\delta$ :n optimaalisinta arvoa on pakkaustehokkuus. Tällöin ajatellaan, että kasville olisi edullisinta saada mahdollisimman monta kukkaa mahtumaan tietyn kokoiseen mykeröön.

Pakkaustehokkuudella tarkoitetaan yleisesti hyödynnetyn alan suhdetta koko alaan, eli mykerössä kukkien yhteenlasketun pinta-alan suhdetta koko mykerön alaan. Keskenään saman kokoisten ympyrän muotoisten kukkien fyllotaksiaa tutkittaessa voidaan kuitenkin käyttää toista määritelmää, joka johtaa samoihin lukuarvoihin, mutta tekee laskut helpomiksi. [15]

Kaavan (1) mukaan kukkien etäisyys keskipisteestä noudattaa kaavaa  $r = c\sqrt{N}$ , sillä tällöin mykeröön mahtuvien kukkien määrä on suoraan verrannollinen mykerön pinta-alaan. Kukat ovat siis laajassa mittakaavassa sijoittuneet tasaisesti. Yleisesti voidaan sanoa, että miten tahansa äärettömälle tasolle sijoittuneet pisteet sijaitsevat laajassa mittakaavassa tasaisesti, jos jossakin kohtaa tasolla sijaitsevan ympyrän sisään jäävien pisteiden lukumäärän suhde ympyrän säteeseen lähenee jotakin vakiota kun ympyrän säde lähestyy ääretöntä. Toisin sanoen on olemassa raja-arvo:

$$A = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2}{N_r}, \quad (19)$$

jossa  $N_r$  on  $r$ -säteisen ympyrän sisään jäävien kukkien lukumäärä. Esimerkiksi spiraalifyllotaksialla  $A$  on tällöin  $\pi c^2$ . Lauseke (19) voidaan tulkita siten, että  $A$  on keskimääräinen pinta-ala kukkaa kohden.

Pienessä mittakaavassa tilanne on kuitenkin toinen. Kukat saattavat sijoittua kaikki samalle suoralle tai suuriin kaukana toisistaan oleviin ryppäisiin ja olla silti suuressa mittakaavassa tasaisesti

sijoittuneita. Tällainen pakkaaminen ei kuitenkaan ole erityisen tehokasta, sillä jos kaikki kukat ovat yhtä suuria, määrää pienin kahden kukan väli suurimman mahdollisimman koon. Itse asiassa riittää, että tarkastelemme pienintä kahden kukan välistä etäisyyttä, sillä jos jossakin on kukkia keskimääräistä tiheämpään pakattuna, niitä täytyy jossakin muualla olla keskimääräistä harvemmassa.

Määrittelemme nyt pakkaustehokkuuden seuraavasti:

$$\eta = \frac{D^2}{A}, \quad (20)$$

missä  $D$  on pienin etäisyys joka voidaan mitata kahden kukan keskipisteiden välillä.  $A$ :n pinta-alatulkinnan perusteella (20) on yhtäpitävä pakkaustehokkuuden pinta-alamääritelmän kanssa.

Sylinterifyllotaksian pakkaustehokkuuden määrittäminen on varsin yksinkertaista, sillä keskimääräinen pinta-ala kukkaa kohden on neljän kukan muodostaman suunnikkaan ala. (ks. kuva 9) ts.  $A = d^2 \sin \gamma$ , missä  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  on yhtenäisten spiraalisarjojen välinen kulma.

Pienin etäisyys kahden kukan välillä on  $d$ , kun  $60^\circ \leq \gamma$ , mutta pienemmällä kulmilla kukat menevät osittain päällekkäin ja välimatkaiksi saadaan  $2 \sin \frac{1}{2} \gamma$ . Tällöin

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{\sin \gamma} & , \text{ kun } \gamma \leq 60^\circ \\ 2 \tan \frac{1}{2} \gamma & , \text{ kun } \gamma > 60^\circ \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{sillä } \frac{(2 \sin \frac{1}{2} \gamma)^2}{\sin \gamma} = 2 \tan \frac{1}{2} \gamma.$$

$\eta$  saavuttaa tällöin maksimiarvonsa kun  $\gamma = 60^\circ$ :

$$1/\sin 60^\circ = 2 \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Spiraalifyllotaksialle  $\eta$ :ta on vaikea määrittää, mutta lähteessä [15] osoitetaan, että se saa maksimiarvonsa  $(5 - 4 \cos \frac{6\pi}{7})/\pi$

$\approx 0,8169$ , kun  $\delta = \tau^{-2}$ . Spiraalifyllotaksian pakkaustehokkuus jää siis parhaimmillaankin selvästi sylinterisestä jälkeen. On kuitenkin helppoa osoittaa, että jos  $\delta$  on rationaaliluku, niin  $\eta = 0$ . [15]

## Syntymekanismi

Vaikuttaa siis siltä, että Fibonaccin lukuja ja kultaista leikkausta ”hyödyntämällä” kasvit voivat sijoittaa osasensa mahdollisimman tehokkaasti, mutta miten kasvit osaavat noudattaa näitä sääntöjä? Millä tavalla kasvi määrää, että kahden peräkkäin syntyneen kukan välinen kulma on juuri  $137,5^\circ$ , varsinkin kun mykerön kukat eivät näytä edes syntyvän yksitellen? Mistä kukka syntyessään tietää, mihin kohtaan on hetkeä aikaisemmin syntynyt kukka mykerön vastakkaisella laidalla? Näihin kysymyksiin on kehitetty vastauksiksi useita teorioita, joista mitään ei ole voitu täysin kumota. Vaikuttaakin itse asiassa siltä, että eri kasvit käyttävät eri menetelmiä saman tuloksen saavuttamiseksi.

Jo pitkään on tiedetty, että kasvien kasvuun vaikuttavat erilaiset aktivaattoreina ja inhibiittoreina toimivat hormonit<sup>5)</sup>. Jokaisen oksan kärkiosassa syntyy inhibiittori-hormonia, joka estää ylimääräisten haarojen syntymistä sen läh-

tyville. Levitesään hormoni laimenee, ja sen vaikutus heikkenee. Kun oksan kärki on kasvaessaan tarpeeksi etäännytynyt lähimmästä haarasta, tietylle etäisyydelle siitä syntyy uusi haara.

On ehdotettu, että tämä järjestelmä aiheuttaisi myös haarojen spiraalisen asettumisen, kun olemassa olevien haarojen tuottama inhibiittori jatkautuisi epätasaisesti varren pintasolukon eri puolille. Tämä johtaisi kuitenkin

kin korkeintaan vuorotellen varren kummallekin puolelle syntyviin tai vastakkain asettuviin lehtiin, jotka vuorottelevat  $90^\circ$  kulmassa, sillä alemmat lehdet sijaitsevat niin kaukana, että ne vaikuttavat lehden syntyalueeseen vain vähän. Onkin havaittu, että spiraalista fyllotaksiaa ilmentävissä kasveissa esiintyy lisäksi toista, paljon hitaammin diffusoituvaa inhibiittori-hormonia, joka toimii kasvupisteen ympäristössä eräänlaisena muistijälkenä siitä, mihin suuntaan aikaisemmat lehdet ovat syntyneet. Lehden sijoittumiseen vaaka-suunnassa vaikuttaa siis eri hormoni kuin pystysuunnassa. Tämäkin hormoni laimenee pikkuhiljaa, jolloin vanhempien lehtien vaikutus sen konsentraatioon vähenee. [13]

Mykerön fyllotaksiaan tämä teoria ei sovellu. Mm. havainto, että mykerön keskiosan leikkaaminen pois ei vaikuta fyllotaksian syntyyn kumosi aikaisemmat teoriat keskipisteen erittämästä hormonista. On myös ongelmallista, että kukat syntyvät ensiksi mykerön reunoille, mutta osaavat silti muodostaa oikean määrän spiraaleita.

Erään teorian mukaan kukkien sijoittuminen määräytyy fyysisen kosketuksen mukaan [1, 2, 3, 4, 10]. Uusi kukan alku syntyy minne tahansa, missä olemassa olevien kukkien väliin jää tarpeeksi tilaa. Kukkat työntävät toisiaan, ja pyrkivät siirtymään mahdollisimman etäälle muista kukista. Tällöin kukkienjärjestys voi muuttua kehityksen myöhemmässäkin vaiheessa, etkä niiden täydy heti aluksi löytää lopullista paikkaansa.

Toisen teorian mukaan kukkien asettuminen määräytyisi kemiallisesti, kuten edellä mainitussa teoriassa lehtien syntymisestä. Kukkakuvion muodostukseen osallistuu kuitenkin sekä aktivaattori että inhibiittori, jotka vaikuttavat

5) Aktivaattorilla tarkoitetaan ainetta, joka edistää jotakin toimintaa elävässä organismissa, ja inhibiittorilla vastaavasti ainetta, joka hidastaa toimintaa tai estää sen täysin.

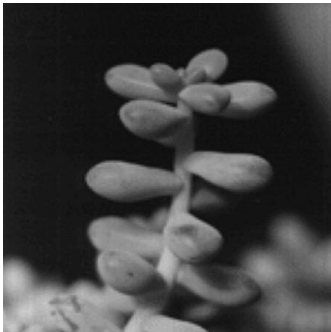
paitsi kukkien syntyyn, myös toisensa tuotantoon soluissa. Hormonit päätyvät lopulta tasapainotilaan, joka määrää kukkien synty-paikat. [10, 18] Tietokonesimulatioissa tämä malli johtaa vastaaviin kuvioihin, kuin kosketusmallin, joten tällä perusteella on vaikea sanoa kumpi on lähempänä totuutta.

Sampo Tiensuu

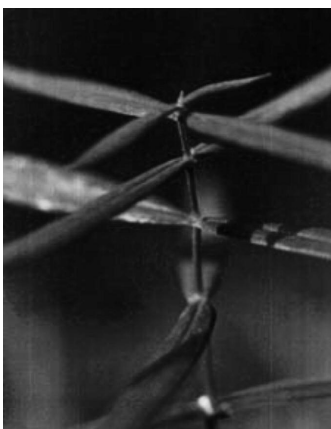
## Kirjallisuutta

- [1] Adler, Irving; *A Model of Contact Pressure in Phyllotaxis*. Journal of Theoretical Biology 45:1–79 (1974)
- [2] Adler, Irving; *A Model of Space Filling in Phyllotaxis*. Journal of Theoretical Biology 53:435–444 (1975)
- [3] Adler, Irving; *The Consequences of Contact Pressure in Phyllotaxis*. Journal of Theoretical Biology 65:29–77 (1977)
- [4] Fowler, Deborah R.; Prusinkiewicz, Premyslaw; Battjes, Johannes; *A Collision-based Model of Spiral Phyllotaxis*. Computer Graphics, 26, 2 (1992)
- [5] Haß, Helmut (2000); *Phyllotaxis Phänomen und Modellierung lebendiger Ordnung*. <http://www.uni-koblenz.de/~odsgroe/www/ha/spiraalen/www-phyllotaxis/0.phyllotaxis.html>
- [5] Hotton, Scott G. (2000) *Scott Hotton's Phyllotaxis Page*, <http://unixgen1.mcs.muohio.edu/~hottong/phylo.html>
- [6] Hotton, Scott G.; *Symmetry of Plants*. University of California, Santa Cruz, 1999.
- [7] Smith College, *Phyllotaxis – an Interactive Site for Mathematical Study of Plant Pattern Formation*, <http://www.math.smith.edu/~phyll/>
- [8] Thomas, R. L.; Cannell, M. G. R.; *The Generative Spiral in Phyllotaxis Theory*. Annals of Botany 45:273–249 (1980).
- [9] Jean, Roger V.; *Mathematical modelling in Phyllotaxis: The State of the Art*. Mathematical Biosciences 64:1–27 (1983)
- [10] Jean, Roger V.; *Phyllotaxis – A Systemic Study in Plant Morphogenesis*. Cambridge University Press, 1994.
- [11] Maxymowych, R.; Erickson, R. O.; *Phyllotactic change induced by gibberelic acid on Xanthium Shoot Apices*. American Journal of Botany 64:33–44 (1977).
- [12] Mitchison, G. J.; *Phyllotaxis and the Fibonacci Series*. Science 196:270–275 (1977).
- [13] Nill, Karl-Heinz; (2000) *Phyllotaxis Helical arrangement of leaves and staggered*. <http://www.eb.tuebingen.mpg.de/abt/4/meinhardt/phylo.html>
- [14] Prusinkiewicz, Premyslaw; Lindenmayer, Aristid; *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, New York 1990.
- [15] Ridley, J. N.; *Packing Efficiency in Sunflower Heads*. Mathematical Biosciences 58:129–139 (1982).
- [16] Vogel, Helmut; *A Better Way to Construct a Sunflower Head*. Mathematical Biosciences 44:179–189 (1979)
- [17] Weise, Dmitriy (1998) *Principle of Minimax and Rise Phyllotaxis (Mechanistic Phyllotaxis Model)*, <http://members.tripod.com/vismath/dima/>
- [18] Young, David A.; *On the Diffusin Theory of Phyllotaxis*. Journal of Theoretical Biology 71:421–432 (1978)

© Dmitriy Weise



Kuva 10: esimerkki kierteisestä fyllotaksiksiasta (yllä) ja vastakkaisesta (alla)



© Dmitriy Weise